15.3 Zračenje ili radijacija toplote

15.3.1 Osnovni pojmovi i definicije

- Energija zračenja Q $[\mathrm{J}]$
- Protok energije zračenja $\Phi = \dfrac{\delta Q}{\mathrm{d}t}$ $[\mathrm{W}]$
- EGZITANCIJA (integralna M i monohromatska M_λ)

  Protok energije zračenja koga emituje elementarna zračeća površ sveden na jedinicu te površi $\mathrm{d}A$

$$M = \frac{\delta^2 Q}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A} = \frac{\delta \Phi}{\mathrm{d}A} \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$M_\lambda = \frac{\delta^3 Q}{\mathrm{d}t\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\lambda} = \frac{\delta^2 \Phi}{\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\lambda} \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

- IRADIJANCIJA, OZRAČENOST (integralna E i monohromatska E_λ)

  Protok energije zračenja koji se dozrači na elementarnu površ sveden na jedinicu te površi $\mathrm{d}A_{\mathrm{doz}}$

$$E = \frac{\delta \Phi}{\mathrm{d}A_{\mathrm{doz}}} \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$E_\lambda = \frac{\delta^2 \Phi}{\mathrm{d}A_{\mathrm{doz}}\,\mathrm{d}\lambda} \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

  Ovaj protok energije zračenja E, koji se iz okoline dozrači do površi nekog tela, delom se od te površi reflektuje E_ρ, delom ga telo apsorbuje E_α, a može se desiti da delom i prođe kroz to telo E_τ. Prema tome:

$$E = E_\rho + E_\alpha + E_\tau, \qquad E_\lambda = E_{\lambda,\rho} + E_{\lambda,\alpha} + E_{\lambda,\tau}$$

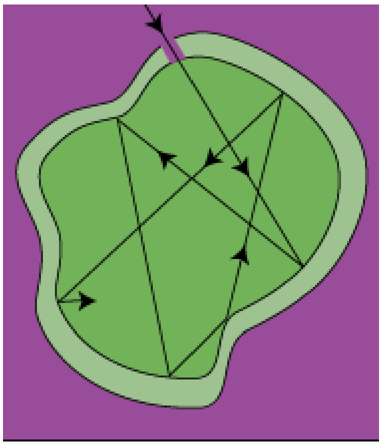
  odnosno,

$$\frac{E}{E} = \frac{E_\rho}{E} + \frac{E_\alpha}{E} + \frac{E_\tau}{E} = \rho + \alpha + \tau = 1, \quad \frac{E_\lambda}{E_\lambda} = \frac{E_{\lambda,\rho}}{E_\lambda} + \frac{E_{\lambda,\alpha}}{E_\lambda} + \frac{E_{\lambda,\tau}}{E_\lambda} = \rho_\lambda + \alpha_\lambda + \tau_\lambda = 1$$

  Na osnovu toga moguće je definisti:

  - koeficijent refleksije (integralni i monohromatski) $\rho = \dfrac{E_\rho}{E}$, $\rho_\lambda = \dfrac{E_{\lambda,\rho}}{E_\lambda}$
  - koeficijent apsorpcije (integralni i monohromatski) $\alpha = \dfrac{E_\alpha}{E}$, $\alpha_\lambda = \dfrac{E_{\lambda,\alpha}}{E_\lambda}$
  - koeficijent transmisije (integralni i monohromatski) $\tau = \dfrac{E_\tau}{E}$, $\tau_\lambda = \dfrac{E_{\lambda,\tau}}{E_\lambda}$

- CRNO TELO (za zračenje toplote crno telo) $\alpha = 1$, $\rho = 0$, $\tau = 0$
- BELO TELO (za zračenje toplote belo telo) $\alpha = 0$, $\rho = 1$, $\tau = 0$



Model crnog tela

- TOPLOTNI SJAJ (integralni H i monohromatski H_λ) ili efektivno toplotno zračenje

  Toplotni sjaj elementarne površi (H, H_λ) predstavlja toplotni protok zračenja sveden na jedinicu te površi a koji predstavlja zbir egzitancije (M ,M_λ) i reflektovanog dela iradijancije (E_ρ, $E_{\lambda,\rho}$ ili ρE, $\rho_\lambda E_\lambda$) sa te površi.

$$H = M + \rho E \quad \left[\mathrm{W/m^2}\right]$$
$$H_\lambda = M_\lambda + \rho_\lambda E_\lambda \quad \left[\mathrm{W/m^3}\right]$$

PLANKOV (Planck) ZAKON ZRAČENJA, 1900. godine

- Plankov zakon zračenja definiše vezu između spektralne egzitancije crne površi $M_\mathrm{c}(\lambda,T)$, talasne dužine λ [m] i termodinamičke temperature tela T [K]
- Dobijen je teorijskim putem, na osnovu Plankove kvantne teorije
- Važi za zračenje crnog tela u uslovima „ravnotežnog" zračenja, to jest kada sva tela koja zrače imaju jednaku temperaturu
- Plankov zakon ima sledeći analitički oblik:

$$M_\mathrm{c}(\lambda,T) = \frac{C_1}{\lambda^5\left[\exp\left(\dfrac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]} \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^3}}\right]$$

  pri čemu su:

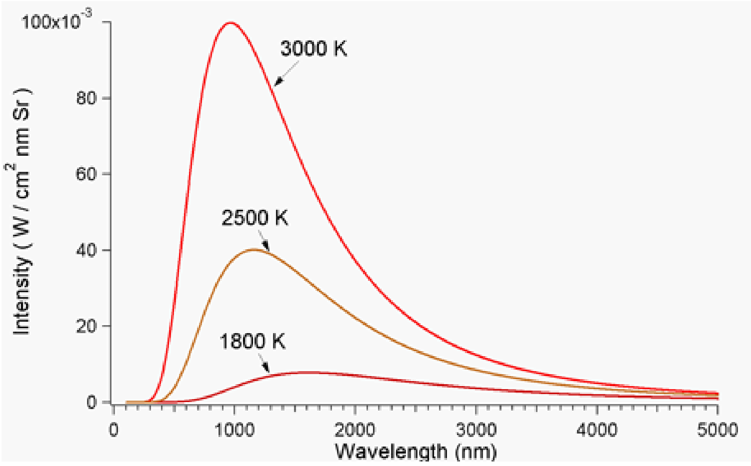
  $C_1 = 3{,}742\cdot10^{-16}$ W/m^2 - prva Plankova konstanta ($C_1 = 2\pi hc^2$)

  $C_2 = 1{,}439\cdot10^{-2}$ mK - druga Plankova konstanta ($C_1 = hc/k$)

  $k = 1{,}38\cdot10^{23}$ J/K - Boltzmanova konstanta

  $h = 6{,}625\cdot10^{-34}$ Js - Plankova konstanta

- Grafička interpretacija Plankovog zakona prikazana je na slici



VINOV (Wien) ZAKON POMERANJA, 1893. godine

- Ustanovljen eksperimentalnim putem, pre Plankovog zakona
- Opisuje zavisnost između termodinamičke temperature površi crnog tela T [K] i talasne dužine zračenja λ [m] pri kojoj se javljaju maksimane vrednosti spektralne egzitancije $\left[M_c(\lambda,T)\right]_{\max}$ - tzv. Vinovu krivu pomeranja
- Može se dobiti izjednačavanjem sa nulom, parcijalnog izvoda izraza za egzitanciju crnog tela $M_c(\lambda,T)$ - Plankovog zakon, po talasnoj dužini λ, to jest,

$$\left[\frac{\partial M_c(\lambda,T)}{\partial \lambda}\right]_{T=\mathrm{idem}} = 0$$

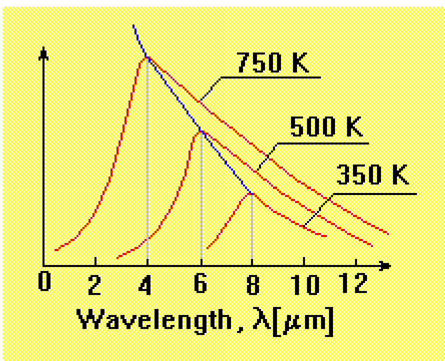
$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{C_1\lambda^{-5}\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]^{-1}\right\}_T = 0$$

$$\left(1-\frac{C_2}{5\lambda T}\right)\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) = 1$$

- Dobija se transcedentna jednačina, koja, Vin je ustanovio merenjem ima samo jedno rešenje - Vinov zakon pomeranja

$$\lambda_{\max} T = 2{,}89 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{mK}$$

- Grafička interpretacija Vinovog zakona prikazana je na slici



- **Pored Vinovog zakona pomeranja** postoji i Vinov zakon, koji kao i Plankov zakon definiše vezu između spektralne egzitancije crne površi $M_c(\lambda,T)$, talasne dužine λ [m] i termodinamičke temperature tela T [K]

- Do ovog zakona Vin je došao eksperimantalnim putem, za temperature crnog tela niže od $2900\ \mathrm{K}$ i za male talasne dužine $\left(C_2 / \lambda T\right) \ll 1$
- Vinov zakon ima sledeći analitički oblik

$$M_{\mathrm{c}}(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{C_2}{\lambda T}\right) \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

ŠTEFAN (Stefan, 1879) – BOLCMANOV (Boltzmann, 1884) ZAKON

- Nezavisno jedan od drugoga, Štefan eksperimentalno (1879), a Bolcman teorijskim putem (1884), utvrdili su zavisnost integralne (ili totalne) egzitancije crnog tela od temperature njegove površi
- Štefan-Bolzmanov zakon:
  Integralna (totalna) egzitancija crnog tela proporcionalana je četvrtom stepenu termodinamičke temperature njegove površi.
- U upotrebi su dva anlitička oblika ovog zakona:

$$\boxed{M_{\mathrm{c}}(T) = \sigma_{\mathrm{c}} T^4 \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}$$

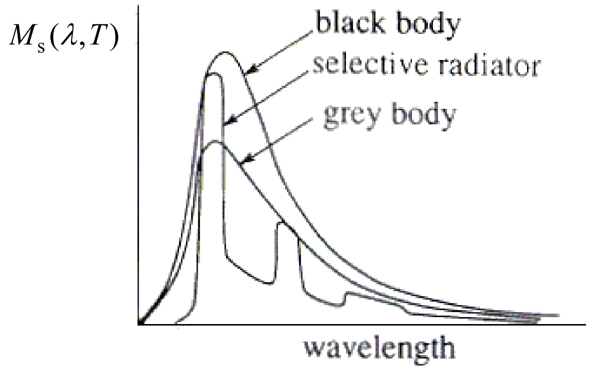
$$\boxed{M_{\mathrm{c}}(T) = C_{\mathrm{c}} \left(\frac{T}{100}\right)^4 \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]}$$

  Konstanta proporcionalnosti $\sigma_{\mathrm{c}} = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$, odnosno $C_{\mathrm{c}} = 5{,}67\ \mathrm{W/(m^2K^4)}$ naziva se Štefan-Bolzmanova konstanta ili konstanta zračenja crnog tela.
- Iako se Štefan-Bolzmanov zakon može izvesti pomoću Prvog i Drugog principa termodinamike, najlakše se izvodi integraljenjem Plankovog zakona, to jest izraza za spektralnu egzitanciju po celom spektru talasnih dužina,:

$$M_{\mathrm{c}}(T) = \int_0^\infty M_{\mathrm{c}}(\lambda, T)\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^\infty \left\{ C_1 \lambda^{-5} \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]^{-1} \right\} \mathrm{d}\lambda$$

$$M_{\mathrm{c}}(T) = \sigma_{\mathrm{c}} T^4 \quad \left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

EMISIVNOST



- SIVA TELA - odnos egzitancije sive površi $M_{\mathrm{s}}(\lambda, T)$ i egzitancije crne površi $M_{\mathrm{c}}(\lambda, T)$ pri istoj temparaturi $T = \mathrm{idem}$

$$\varepsilon_{\mathrm{s}}(T) = \frac{M_{\mathrm{s}}(\lambda, T)}{M_{\mathrm{c}}(\lambda, T)} = f(T), \qquad \varepsilon(T) \neq f(\lambda),$$

$$T = \mathrm{idem} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\mathrm{s}} = \mathrm{idem}$$

- REALNA TELA

KIRHOFOV (Kirchhoff) ZAKON, 1882 godine

Kirhofov zakon daje vezu između sposobnosti emisije zračenja i sposobnosti apsorpcije zračenja neke sive površine, a glasi:

- **Emisivnost (ε) i apsorptivnost (α) sive površine na istoj temperaturi, imaju iste vrednosti.**

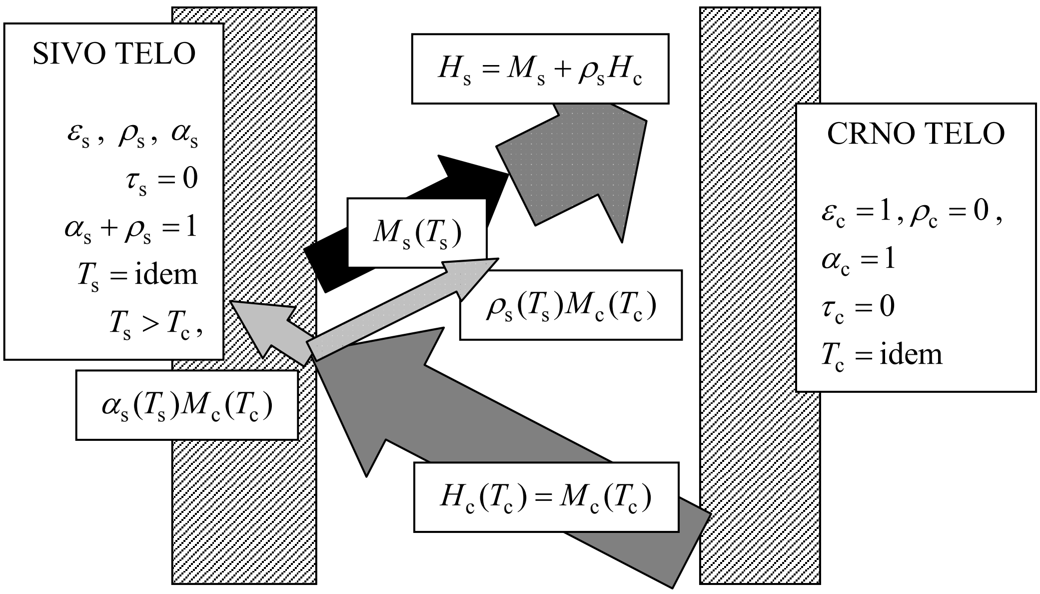
$$\boxed{\varepsilon(T)=\alpha(T)}$$

- Ova zavisnost važi kako za totalne, tako i za spektralne vrednosti emisivnosti i apsorptivnosti

$$\boxed{\varepsilon_{\lambda}(T)=\alpha_{\lambda}(T)}$$

Dokaz

- Posmatraju se dve paralelne ploče, sive i crne površi između kojih se nalazi prozračna sredina (vidi sliku)
- Temperatura sive površi T_s viša je od temperature crne površi T_c ($T_s > T_c$)
- Toplotni sjaj sive površi je $H_s = M_s(T_s) + \rho_s(T_s) M_c(T_c)$ $\left[\mathrm{W/m^2}\right]$
- Toplotni sjaj crne površi je $H_c = M_c$ $\left[\mathrm{W/m^2}\right]$



- Toplotni protok po jedinci površine sa sive na crnu površinu:

$$\varphi = H_s - H_c = \left[M_s(T_s) + \rho_s(T_s) H_c(T_c)\right] - H_c(T_c)$$

$$\varphi = \left[M_s(T_s) + \rho_s(T_s) M_c(T_c)\right] - M_c(T_c)$$

$$\varphi = H_s - H_c = M_s(T_s) - \left[1 - \rho_s(T_s)\right] M_c(T_c)$$

$$\varphi = M_s(T_s) - \alpha_s(T_s) M_c(T_c)$$

- Ukoliko je $T_s = T_c$, ukupan toplotni protok je jednak nuli $\varphi = 0$,

$$M_s(T_s) = \alpha_s(T_s) M_c(T_s)$$

a prema Štefan-Boltzmanovom zakonu

$$\varepsilon_s(T_s)\cancel{\sigma_c T_s^4} = \alpha_s(T_s)\cancel{\sigma_c T_s^4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon(T)=\alpha(T)}$$

RAZMENA ENERGIJE ZRAČENJEM IZMEĐU SIVIH POVRŠI ČVRSTIH TELA RAZDVOJENIH PROZRAČNOM SREDINOM (Priručnik, D.4.1, str. 333)

- Razmenjena energija zračenjem zavisi od (npr. za dve sive površi)
  - Temperatura površi čvrstih tela T_1, T_2
  - Veličina (površina) površi (obuhvata se tzv. efektivnom površinom uzajamnog zračenja $H_{1,2}$)
  - Geometrije i prostornog položaja površi čvrstih tela (obuhvata se tzv. geometrijskim faktorima zračenja $\varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}$)
  - Emisivnošću površina ε_1, ε_2
  - Geometrija, prostorni položaj površi čvrstih tela i njihova emisivnost zajedno se obuhvataju kroz tzv. redukovanu emisivnost ε_{red}

- Izgled osnovnog izraza za izračunavanje razmenjene energije zračenjem

$$\Phi = C_{\text{c}} \varepsilon_{\text{red}} H_{1,2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

- Konstanta zračenja crnog tela C_{c}

- Efektivna površina uzajamnog zračenja $H_{1,2}$ i geometrijski faktori zračenja $\varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}$ - tabela D.4.1, str. 333.

$$H_{1,2} = \varphi_{1,2} A_1$$

- Redukovana emisivnost ε_{red}

$$\varepsilon_{\text{red}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 \right) \varphi_{1,2} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \varphi_{2,1}}$$

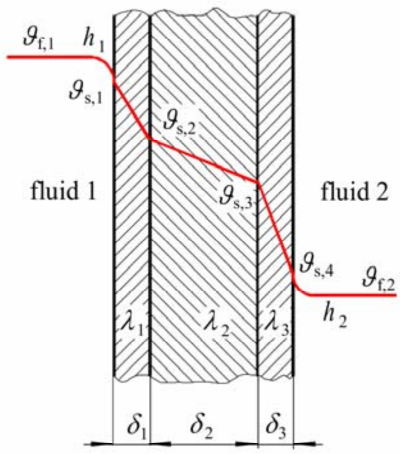
- Emisivnost površina ε_1, ε_2 - tabela D.4.2, str. 335.

DODATAK – Prenošenje toplote

Tabela D.1. USTALJENO TOPLOTNO PROVOĐENJE, PRELAŽENJE I PROLAŽENJE ZA VIŠESLOJNI RAVNI I VIŠESLOJNI KRUŽNOCINDRIČNI ZID

<table>
<tr>
<th>Skica</th>
<th>Izrazi za toplotno provođenje, prelaženje i prolaženje [pri $\lambda = \text{idem}$, i bez oslobađanja i vezivanja energije po zapremini zida ($\varphi_1 = 0$)].
Sa n - označen je broj slojeva u zidu, pri idealnom dodiru između tih slojeva.</th>
</tr>
<tr>
<td>

Ravni zid



</td>
<td>

Provođenje

Površinski toplotni protok

$$\varphi = \frac{\vartheta_{s,1} - \vartheta_{s,n+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i}} \text{ , W/m}^2;$$

Prelaženje

Površinski toplotni protok

$$\varphi = h_1(\vartheta_{f,1} - \vartheta_{s,1}) = h_2(\vartheta_{s,4} - \vartheta_{f,2}) \text{ , W/m}^2;$$

Prolaženje

Površinski toplotni protok

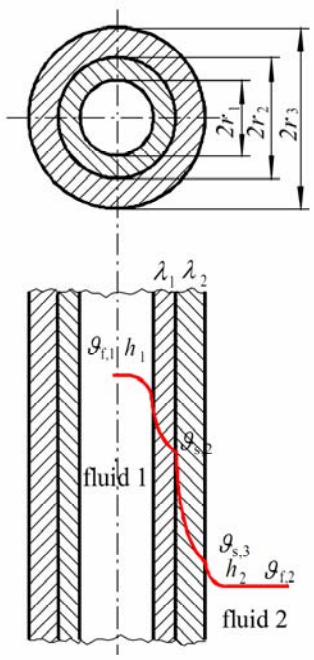
$$\varphi = k(\vartheta_{f,1} - \vartheta_{f,2}) \text{ , W/m}^2;$$

Koeficijent toplotnog prolaženja kroz višeslojni ravni zid

$$k = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{h_2}} \text{ , W/(m}^2\text{K).}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Kružnocilindrični zid



</td>
<td>

Provođenje

Linijski toplotni protok

$$\varphi_l = \frac{\vartheta_{s,1} - \vartheta_{s,n+1}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln\frac{r_{i+1}}{r_i}} \text{ , W/m;}$$

Prelaženje

Linijski toplotni protok

$$\varphi_l = 2r_1\pi h_1(\vartheta_{f,1} - \vartheta_{s,1}) = 2r_3\pi h_2(\vartheta_{s,3} - \vartheta_{f,2}) \text{ , W/m;}$$

Prolaženje

Linijski toplotni protok

$$\varphi_l = k_l(\vartheta_{f,1} - \vartheta_{f,2}) \text{ , [W/m]}$$

Linijski koeficijent toplotnog prolaženja kroz višeslojni kružnocilindrični zid

$$k_l = \frac{1}{\frac{1}{2r_1\pi h_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi\lambda_i} \ln\frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{2r_{n+1}\pi h_2}} \text{ , W/(mK).}$$

</td>
</tr>
</table>